



'समानो मन्त्रः समितिः समानी'

**UNIVERSITY OF NORTH BENGAL**  
B.Sc. Programme 6th Semester Examination, 2023

**SEC2-P2-MATHEMATICS**

Time Allotted: 2 Hours

Full Marks: 60

*The figures in the margin indicate full marks.*

**The question paper contains SEC4A and SEC4B. Candidates are required to answer any *one* from the *two* Courses and they should mention it clearly on the Answer Book.**

**SEC4A**

**GRAPH THEORY**

**GROUP-A / বিভাগ-ক / সমূহ-ক**

1. Answer any **four** questions: 3×4 = 12  
যে-কোন চারটি প্রশ্নের উত্তর দাওঃ  
কুনে চার প্রশ্নকো উত্তর দিনুহোস্:
- (a) Define walk, path and circuit in a graph. 1+1+1  
গ্রাফের মধ্যে walk, path এবং circuit কে সংজ্ঞায়িত কর।  
এক গ্রাফমা walk, path অনি circuit পরিभाषিত गर्नुहोस्।
- (b) Give example of a graph which is 1+1+1  
একটি করে গ্রাফের উদাহরণ দাও যেটি  
গ্রাফকো उदाहरण दिनुहोस् जुन हो
- (i) Eulerian but not Hamiltonian.  
Eulerian কিন্তু Hamiltonian নয়।  
Eulerian हो तर Hamiltonian होइन्।
- (ii) Hamiltonian but not Eulerian.  
Hamiltonian কিন্তু Eulerian নয়।  
Hamiltonian हो तर Eulerian होइन्।
- (iii) Neither Eulerian nor Hamiltonian.  
नय Eulerian, नय Hamiltonian।  
न Eulerian न Hamiltonian हो।
- (c) Prove that the number of vertices of odd degree in a graph is always even.  
प्रमाण कर कोन एकटि ग्राफे अयुग्म डिग्री (degree) विशिष्ट शीर्षबिन्दु संख्या जोड़ संख्यक।  
ग्राफमा विषम डिग्रीको vertices को संख्या सधैं समान हुन्छ भनि प्रमाण गर्नुहोस्।

(d) Prove that a graph is a tree iff it is minimally connected.

প্রমাণ কর একটি গ্রাফ tree হবে যদি এবং কেবলমাত্র যদি ইহা একটি ন্যূনতম সংযুক্ত (minimally connected) গ্রাফ হয়।

প্রমাণ করুন যে একটি গ্রাফ tree হলে যদি যৌ minimally connected ছাড়া অন্যভাবে।

(e) Find the product of two graphs  $G_1$  and  $G_2$  shown below:

নিম্নলিখিত  $G_1$  এবং  $G_2$  গ্রাফের গুণফল (product) নির্ণয় কর:

তল দেখাউকো দুইটি গ্রাফ  $G_1$  আনি  $G_2$  কৌ গুণন পত্তা লগাউনুহোস্ :



(f) Show that the maximum number of edges in a simple graph with  $n$  vertices is  $\frac{n(n-1)}{2}$ .

দেখাও যে  $n$  শীর্ষবিন্দু যুক্ত কোন একটি সাধারণ (simple) গ্রাফে সর্বোচ্চ বাহু সংখ্যা  $\frac{n(n-1)}{2}$  হয়।

$n$  vertices भएको साधारण ग्राफमा किनाराहरूको अधिकतम संख्या  $\frac{n(n-1)}{2}$  हो भनि देखाउनुहोस्।

**GROUP-B / বিভাগ-খ / সমূহ-খ**

**Answer any four questions**

6×4 = 24

যে-কোন চারটি প্রশ্নের উত্তর দাও

कुनै चारवटा प्रश्नको उत्तर दिनुहोस्

2. Prove that in a complete graph  $G$  with  $n$  (an odd number)  $\geq 3$  vertices, there are  $\frac{n-1}{2}$  edge-disjoint Hamiltonian circuits. 6

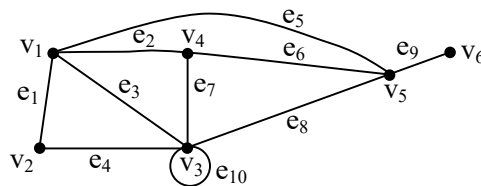
প্রমাণ কর  $n$  (একটি বিজোড় সংখ্যা)  $\geq 3$  শীর্ষবিন্দু বিশিষ্ট কোন একটি সম্পূর্ণ (complete) গ্রাফে  $\frac{n-1}{2}$  সংখ্যক বাহু-বিচ্ছিন্ন Hamiltonian সার্কিট থাকে।

$n$  (এক বিষম সংখ্যা)  $\geq 3$  vertices भएको पूर्ण ग्राफमा  $\frac{n-1}{2}$  किनारा-विच्छेदन (edge-disjoint) Hamiltonian circuits हुन्छ भनि प्रमाण गर्नुहोस्।

3. Find the incidence matrix corresponding to the following graph: 6

নিম্নলিখিত গ্রাফটির অনুরূপ incidence মেট্রিক্সটি নির্ণয় কর:

निम्न ग्राफ सँग सम्बन्धित incidence matrix पत्ता लगाउनुहोस्:



4. Prove that a non-empty connected graph  $G$  is Eulerian iff  $G$  is the union of some edge-disjoint circuits. 6

প্রমাণ কর একটি অশূন্য সংযুক্ত গ্রাফ  $G$  Eulerian হবে যদি এবং কেবলমাত্র যদি  $G$  কে কিছু বাহু-বিচ্ছিন্ন circuit-এর সংযোগে লেখা যায়।

प्रमाण गर्नुहोस् कि एक गैर-खाली connected ग्राफ  $G$  Eulerian हो यदि  $G$  किनारा-विच्छेदन (edge-disjoint) circuits को मिलन हो भने मात्र।

5. Show that maximum number of vertices on level  $k$  of a Binary tree is  $2^k \geq n$ , where  $n \geq 0$ . 6  
 देखाओ ये  $k$ -level विशिष्ट कोन एकटि binary tree ते सर्वोच्च  $2^k \geq n$  (येखाने  $n \geq 0$ ) संख्यक शीर्षबिन्दु থাকबे।  
 Binary tree को  $k$  स्तर मा vertices को अधिकतम संख्या  $2^k \geq n$  हो भनि देखाउनुहोस् जहाँ,  $n \geq 0$  हुन्।
6. Show that a bipartite graph cannot have a cycle of odd length. 6  
 देखाओ ये कोन एकटि bipartite ग्राफे विजोड दैर्घ्ये कोन cycle থাকते पारे ना।  
 Bipartite ग्राफ मा विषम लम्बाइको चक्र (cycle) हुन सकदैन भनि देखाउनुहोस्।
7. Define self complementary graph. Prove that order of a self complementary graph must be of the form  $4k$  or  $4k + 1$ ,  $k$  being a positive integer. 1+5  
 Self complementary ग्राफ के संज्ञायित कर। प्रमाण कर एकटि self complementary ग्राफे क्रम (order) एर रूपटि  $4k$  वा  $4k + 1$  हय येखाने  $k$  एकटि धनात्मक पूर्णसंख्या।  
 Self complementary ग्राफ परिभाषित गर्नुहोस्। प्रमाण गर्नुहोस् कि self complementary ग्राफ को क्रम  $4k$  वा  $4k + 1$  को रूपमा हुन्छ, जहाँ  $k$  एक धनात्मक पूर्णांक हुन्।

**GROUP-C / विभाग-ग / समूह-ग**

**Answer any two questions**

12×2 = 24

ये-कोन दुटि प्रश्नेर उत्तर दाओ

कुनै दुई प्रश्नको उत्तर दिनुहोस्

8. (a) Describe the travelling salesman problem. 6  
 भ्रमण विक्रेयकर्मी समस्या (travelling salesman problem) वर्णना कर।  
 Travelling salesman समस्या वर्णन गर्नुहोस्।
- (b) What do you mean by a spanning tree? Does every graph contains a spanning tree? Justify your answer. 6  
 Spanning tree बलते कि बोबा ? प्रतिटि ग्राफे कि spanning tree থাকे ? तोमार उत्तर याचाई कर।  
 Spanning tree भन्नाले के बुझिन्छ ? के सबै ग्राफमा spanning tree हुन्छ ? आफ्नो जवाफ औचित्य पार्नुहोस्।
9. (a) Find the adjacency matrix of the complete bipartite graph  $K_{3,3}$ . 6  
 सम्पूर्ण bipartite ग्राफ  $K_{3,3}$  -एर adjacency मैट्रिक्सटि निर्णय कर।  
 पूर्ण द्विपक्षीय (complete bipartite) ग्राफ  $K_{3,3}$  को adjacency matrix पत्ता लगाउनुहोस्।
- (b) What is the diameter of a graph? If the distance  $d(x, y)$  between two vertices  $x$  and  $y$  in a graph is defined to be the length of the shortest path connecting them, then prove that the distance function is a metric. 1+5

কোন একটি গ্রাফের ব্যাস বলতে কি বোঝ ? যদি কোন একটি গ্রাফের  $x$  এবং  $y$  শীর্ষবিন্দুর মধ্যে দূরত্ব  $d(x, y)$ -কে বিন্দুদ্বয়ের মধ্যবর্তী সংযোগকারী সর্বনিম্ন path-এর দৈর্ঘ্যকে সংজ্ঞায়িত করে তবে প্রমাণ কর দূরত্ব অপেক্ষকটি (distance function) একটি metric হবে ।

এক গ্রাফকো ব্যাস কে হো ? যদি এক গ্রাফমা দুই vertices  $x$  অনি  $y$  बीचको दुरी  $d(x, y)$  लाई तिनीहरू लाई जोड्ने सबैभन्दा छोटो मार्गको लम्बाईको रूपमा परिभाषित गरे, प्रमाण गर्नुहोस् कि त्यो दुरी प्रकार्य एक मेट्रिक हो ।

- 10.(a) Show that a simple graph with  $n$  vertices and  $k$  components can have at most  $\frac{(n-k)(n-k+1)}{2}$  edges. 6

प्रमाण कर  $n$  शीर्षबिन्दु एवं  $k$  उपांशविशिष्ट कोन एकटि साधारण ग्राफे सर्वोच्च  $\frac{(n-k)(n-k+1)}{2}$  संख्यक बाहू থাকरे ।

$n$  vertices अनि  $k$  components भएको साधारण ग्राफमा अधिकतम  $\frac{(n-k)(n-k+1)}{2}$  किनारा हरू हुन सकछन् भनि देखाउनुहोस् ।

- (b) Prove that a connected graph  $G$  is an Euler graph if and only if all vertices of  $G$  are of even degree. 6

प्रमाण कर एकटि संयुक्त ग्राफ  $G$  Euler ग्राफ হয় यदि एवं केवलमात्र यदि  $G$ -এর সকল শীর্ষবিন্দুর ডিগ্রী জোড় হবে ।

प्रमाण गर्नुहोस् कि एक जडान गरिएको ग्राफ  $G$  Euler हो यदि  $G$  का सबै vertices समान डिग्रिका छन् भने मात्र ।

- 11.(a) Prove that every tree has either one or two centres. 6

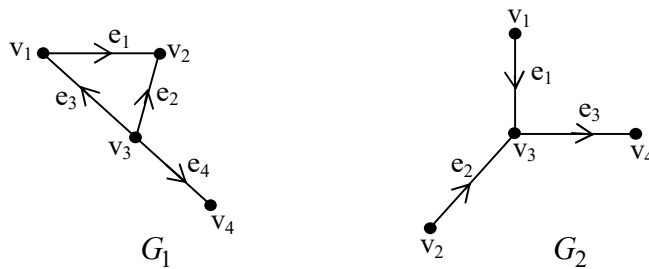
प्रमाण कर प्रतिटि tree ते হয় एकटि नय दुटि केन्द्र (centre) থাকे ।

प्रत्येक tree मा एक वा दुई केन्द्रहरू छन् भनि प्रमाण गर्नुहोस् ।

- (b) Find the incidence matrix for the digraph  $G$ , having two disconnected units  $G_1$  and  $G_2$ . 6

निम्ने  $G_1$  एवं  $G_2$  दुटि विच्छिन्न उपांशविशिष्ट कोन एकटि digraph  $G$ -এর incidence matrix टि निर्णय कर ।

दुई विच्छेदन (disconnected) एकाइहरू  $G_1$  अनि  $G_2$  भएको digraph  $G$  को लागि incidence matrix पत्ता लगाउनुहोस् :



## SEC4B

## BOOLEAN ALGEBRA AND AUTOMATA THEORY

## GROUP-A / বিভাগ-ক / সমূহ-ক

Answer any *four* questions from the following

3×4 = 12

যে-কোন চারটি প্রশ্নের উত্তর দাও

কুনৈ চার প্রশ্নকো উত্তর দিনুহোস্

1. Define an ordered set. Give two examples of ordered sets.  
একটি ordered সেটকে সংজ্ঞায়িত কর। Ordered সেটের দুটি উদাহরণ দাও।  
Ordered সেট পরিभाषিত গর্নুহোস্। Ordered সেটহরুকা দুই উদাহরণ দিনুহোস্।
2. Define alphabet. Explain any finite automata with output.  
Alphabet কে সংজ্ঞায়িত কর। আউটপুট সহ সসীম automata কে ব্যাখ্যা কর।  
Alphabet পরিभाषিত গর্নুহোস্। Output সং কুনৈ পনি পরিমিত automata ব্যাখ্যা গর্নুহোস্।
3. Define a complete lattice. Give an example of it.  
একটি উদাহরণের সাহায্যে complete lattice কে সংজ্ঞায়িত কর।  
এক complete lattice পরিभाषিত গর্নুহোস্। यसকো এক উদাহরণ দিনুহোস্।
4. Show that associative laws hold in a Boolean Algebra.  
দেখাও যে Boolean Algebra তে associative সূত্রগুলি সিদ্ধ হয়।  
বুলিয়ন বীজগণিত মা associative law হুন্ট ভনি দেখাওনুহোস্।
5. Show that  $(01)^* (01 + 1^*)$  is a regular expression over  $A = \{0, 1\}$ .  
দেখাও যে  $A = \{0, 1\}$  এর উপর  $(01)^* (01 + 1^*)$  একটি regular রাশিমালা।  
দেখাওনুহোস্ কি  $A = \{0, 1\}$  মা  $(01)^* (01 + 1^*)$  এক regular expression হো।
6. Find a DFA which accepts the set of all strings over  $\{0, 1\}$  with three consecutive 1's.  
একটি DFA খুঁজে বের কর যা  $\{0, 1\}$ -এর উপর পরপর তিনটি 1 থাকবে এমন সমস্ত string-এর সেটকে গ্রহণ করে।  
এক DFA ফেলা পার্নুহোস্ জসলে  $\{0, 1\}$  মা সর্বে strings কো সেট লাই লগাতার তিন 1 কো সাথ স্বীকার গর্দেট।

## GROUP-B / বিভাগ-খ / সমূহ-খ

Answer any *four* questions from the following

6×4 = 24

যে-কোন চারটি প্রশ্নের উত্তর দাও

কুনৈ চার প্রশ্নকো উত্তর দিনুহোস্

7. Let  $L$  and  $K$  be two lattices and  $f : L \rightarrow K$  be a map. Show that the following are equivalent: 6
  - (i)  $f$  is order preserving
  - (ii)  $\forall a, b \in L, f(a \vee b) \geq f(a) \vee f(b)$
  - (iii)  $\forall a, b \in L, f(a \wedge b) \leq f(a) \wedge f(b)$

ধর  $L$  এবং  $K$  দুটি lattice এবং  $f : L \rightarrow K$  হল একটি অপেক্ষক। দেখাও যে

- (i)  $f$  একটি ক্রম সংরক্ষিত (order preserving) অপেক্ষক।
- (ii)  $\forall a, b \in L, f(a \vee b) \geq f(a) \vee f(b)$
- (iii)  $\forall a, b \in L, f(a \wedge b) \leq f(a) \wedge f(b)$

$L$  অনি  $K$  দুই lattice অনি  $f : L \rightarrow K$  এক প্রকার্য হুন্। দেখাওনুহোস্ কি নিম্ন একৈ হুন্।

- (i)  $f$  is order preserving
- (ii)  $\forall a, b \in L; f(a \vee b) \geq f(a) \vee f(b)$
- (iii)  $\forall a, b \in L, f(a \wedge b) \leq f(a) \wedge f(b)$

8. (a) Use K-map to find a minimal form of the function

4

$$f(w, x, y, z) = wxyz + w'xyz + w'xy'z + wx'y'z + w'x'y'z.$$

K-map টির সাহায্যে

$$f(w, x, y, z) = wxyz + w'xyz + w'xy'z + wx'y'z + w'x'y'z$$

অপেক্ষকটির minimal রূপটি নির্ণয় কর।

K-map প্রয়োগ করে নিম্ন প্রকার্যকো ন্যূনতম রূপ পত্তা লগাওনুহোস্।

$$f(w, x, y, z) = wxyz + w'xyz + w'xy'z + wx'y'z + w'x'y'z$$

(b) Find the CNF for the function

2

$$f(x, y, z) = xyz + x'yz + xy'z' + x'yz'.$$

$f(x, y, z) = xyz + x'yz + xy'z' + x'yz'$  অপেক্ষকটির CNF রূপটি নির্ণয় কর।

প্রকার্য  $f(x, y, z) = xyz + x'yz + xy'z' + x'yz'$  কো লাগী CNF পত্তা লগাওনুহোস্।

9. For each of the following Boolean expressions, draw a logic circuit.

3+3

নিম্নলিখিত প্রতিটি Boolean রাশিমালার logic circuit টি অঙ্কন কর।

নিম্ন প্রত্যেক বুলিয়ন অভিব্যক্তিকো লাগি, logic circuit কোর্নুহোস্।

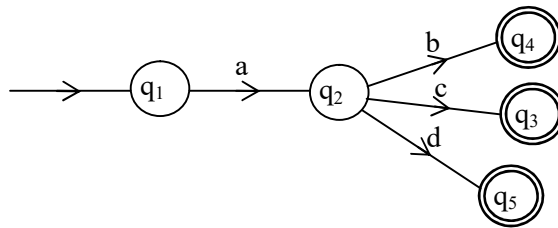
- (i)  $x(yz + y'z') + x'(yz' + y'z)$
- (ii)  $(x + y + z + u)(x + y + u)(x + z)$

10. Find regular expression for the following finite automata.

6

নিম্নলিখিত সসীম automata-এর regular রাশিমালাটি নির্ণয় কর।

নিম্ন পরিমিত automata কো লাগি নিয়মিত অভিব্যক্তি পত্তা লগাওনুহোস্।



11. Let  $G = (\{A_0, A_1, A_2, A_3\}, \{a, b\}, P, A_0)$ ; where  $P$  consists of  $A_0 \rightarrow aA_0 | bA_1$ ,  $A_1 \rightarrow aA_2 | aA_3$ ,  $A_2 \rightarrow a | bA_1 | bA_3$ ,  $A_3 \rightarrow b | bA_0$ . Construct an NDFSA accepting  $L(G)$ . 6

ধর  $G = (\{A_0, A_1, A_2, A_3\}, \{a, b\}, P, A_0)$ , যেখানে  $P$ ,  $A_0 \rightarrow aA_0 | bA_1$ ,  $A_1 \rightarrow aA_2 | aA_3$ ,  $A_2 \rightarrow a | bA_1 | bA_3$ ,  $A_3 \rightarrow b | bA_0$  দ্বারা গঠিত।  $L(G)$  কে ধরে নিয়ে NDFSA গঠন কর।

$G = (\{A_0, A_1, A_2, A_3\}, \{a, b\}, P, A_0)$ ; হুন্ জहाँ  $A_0 \rightarrow aA_0 | bA_1$ ,  $A_1 \rightarrow aA_2 | aA_3$ ,  $A_2 \rightarrow a | bA_1 | bA_3$ ,  $A_3 \rightarrow b | bA_0$   $P$  मा समावेश छन्।  $L(G)$  स्वीकार गर्ने NDFSA निर्माण गर्नुहोस्।

12. Draw a DFA that accepts the following language: 6  
একটি DFA অঙ্কন কর যা নিম্নের ভাষাকে প্রকাশ করেঃ

$$L = \{x \in \{0, 1\}^* : x \text{ contains three consecutive } 0\text{'s}\}$$

নিম্ন ভাষা স্বীকার गर्ने DFA कोर्नुहोस्।

$$L = \{x \in \{0, 1\}^* : x \text{ ले लगातार तीनवटा } 0 \text{ समावेश गर्दछ}\}$$

### GROUP-C / বিভাগ-গ / সমূহ-গ

Answer any two questions from the following

12×2 = 24

যে-কোন দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও

कुनै दुई प्रश्नको उत्तर दिनुहोस्

- 13.(a) Let  $(B, +, \cdot, ')$  be a Boolean algebra with 0 and 1 as identities for the operations  $+$  and  $\cdot$  respectively. Prove that for any  $a, b \in B$ ; 3+3

(i)  $a \cdot b = a \Rightarrow a \cdot b' = 0$

(ii)  $a \cdot b' = 0 \Rightarrow a + b = b$ .

ধর  $(B, +, \cdot, ')$  একটি Boolean algebra যার মধ্যে 0 ও 1; যথাক্রমে  $+$  ও  $\cdot$  প্রক্রিয়ায় identity প্রমাণ কর  $a, b \in B$  এর জন্য

(i)  $a \cdot b = a \Rightarrow a \cdot b' = 0$

(ii)  $a \cdot b' = 0 \Rightarrow a + b = b$ .

$(B, +, \cdot, ')$  एक बुलियन बीजगणित हुन् जहाँ 0 अनि 1 क्रमशः  $+$  अनि  $\cdot$  अपरेशन को लागि identifiers हुन्। कुनै पनि  $a, b \in B$  को लागि प्रमाण गर्नुहोस्:

(i)  $a \cdot b = a \Rightarrow a \cdot b' = 0$

(ii)  $a \cdot b' = 0 \Rightarrow a + b = b$ .

- (b) Find the minimal SOP of the following Boolean expression: 6

$$f(x, y, z) = xyz + x'yz + x'yz' + xy'z + x'y'z$$

निम्नलिखित Boolean राशिमालाটির सर्वनिम्न SOP टि निर्णय करः

$$f(x, y, z) = xyz + x'yz + x'yz' + xy'z + x'y'z$$

निम्न बुलियन अभिव्यक्ति को न्यूनतम SOP पत्ता लगाउनुहोस्

$$f(x, y, z) = xyz + x'yz + x'yz' + xy'z + x'y'z$$

- 14.(a) Draw the Hasse diagram for the poset  $(P(S), \subseteq)$ ; where  $P(S)$  is the power set on  $S = \{1, 2, 3\}$ . 4

$(P(S), \subseteq)$  poset টির Hasse রেখাচিত্রটি অঙ্কন কর, যেখানে  $P(S)$ ,  $S = \{1, 2, 3\}$  সেটের power সেট।

Poset  $(P(S), \subseteq)$  কো लागि Hasse रेखाचित्र कोर्नुहोस्, जहाँ  $P(S)$ ,  $S = \{1, 2, 3\}$  मा power set हुन्।

(b) In any lattice  $L$ , prove that

$$a \wedge (b \vee c) \geq (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \text{ for all } a, b, c \in L.$$

কোন একটি lattice  $L$  এর মধ্যে,

প্রমাণ কর  $a \wedge (b \vee c) \geq (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$  সকল  $a, b, c \in L$  এর জন্য।

प्रत्येक lattice  $L$  मा, कुनै पनि  $a, b, c \in L$  को लागि प्रमाण गर्नुहोस्

$$a \wedge (b \vee c) \geq (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$

(c) Let  $L$  be a complemented distributive lattice. Prove that

$$(a \vee b)' = a' \wedge b' \text{ and } (a \wedge b)' = a' \vee b' \text{ for all } a, b, \in L.$$

ধর  $L$  একটি complemented distributive lattice প্রমাণ কর

$$(a \vee b)' = a' \wedge b' \text{ এবং}$$

$$(a \wedge b)' = a' \vee b' \text{ সকল } a, b, \in L \text{ এর জন্য।}$$

$L$  एक पूरक वितरण lattice हुन् भने कुनै पनि  $a, b, \in L$  को लागि प्रमाण गर्नुहोस्

$$(a \vee b)' = a' \wedge b' \text{ अनि } (a \wedge b)' = a' \vee b'$$

15.(a) Find the parse tree for generating the string 0100110 from the following grammar.

निम्नलिखित व्याकरण থেকে string 0100110 तैरी करार जन्त्य parse tree टि निर्णय कर।

निम्न grammar बाट 0100110 string उत्पन्न गर्न का लागि Parse tree पत्ता लगाउनुहोस्

$$S \rightarrow 0S \mid 1AA$$

$$A \rightarrow 0 \mid 1A \mid 0B$$

$$B \rightarrow 1 \mid 0BB$$

(b) State and prove pumping lemma for regular languages.

Regular भाषार जन्त्य pumping lemma टि विवृति सह प्रमाण कर।

नियमित भाषाहरूको लागि pumping lemma लेख्नुहोस् अनि प्रमाण गर्नुहोस्।

16.(a) Design a Turing machine that accepts the set of all even palindromes over  $\{0, 1\}$ .

एमन एकटि Turing machine एर नकशा कर या  $\{0, 1\}$  एर उपर समस्त even palindrome एर सेटके ग्रहण करे।

Turing machine डिजाइन गर्नुहोस् जसले  $\{0, 1\}$  मा सबै सम palindromes को सेट स्वीकार गर्दछ।

(b) Convert the given NFA to DFA.

प्रदत्त NFA के DFA ते रूपान्तरित कर।

दिइएको NFA लाई DFA मा रूपान्तरण गर्नुहोस्।

